

## Областная олимпиада юных математиков, 7 класс, 2019 г.

### I тур

1. Чи існує пара правильних нескоротних дробів, різниця яких дорівнює їх добутку і знаменник одного з яких дорівнює 2019? Якщо існує, то знайдіть принаймні дві пари таких дробів.
2. З точки  $O$  проти руху годинникової стрілки проведені  $n$  променів  $OA_1, OA_2, \dots, OA_n$ , при цьому  $\angle A_1OA_n < 180^\circ$ . Для якого найменшого  $n$  могло таке статися, що серед кутів  $\angle A_iOA_j$ ,  $1 \leq i < j \leq n$  буде пара кутів величиною  $60^\circ$ , пара кутів величиною  $45^\circ$  та пара кутів величиною  $30^\circ$ .
3. Знайдіть середнє арифметичне усіх п'ятицифрових чисел, що мають такі властивості:
  - 1) число має вигляд  $\overline{ab0cd}$ , тобто третя цифра дорівнює нулю;
  - 2) усі цифри різні;
  - 3) число  $\overline{ab0cd}$ , а також число  $\overline{dc0ba}$  діляться націло на 7.
4. Задана біла дошка  $6 \times 2019$ . Андрій та Арсеній грають в таку гру: вони по черзі (розпочинає Андрій), перефарбовують одну білу клітинку  $1 \times 1$  в чорний колір, при цьому не можна фарбувати в чорний колір клітинку, якщо після цього буде існувати квадрат  $3 \times 3$ , в якому стане дві чорні клітини. Програє той, хто не може зробити свій хід. Хто перемагає при правильній грі обох?

### II тур

1. Рома, Шон и Леша готовились к новому учебному году, и им оставалось купить по новому небьющемуся люмографу для уроков геометрии. Оказалось, что денег у них для этого недостаточно: Роме не хватало трети цены люмографа, Шону – четверти, а Леше – одной пятой. Когда же объявили распродажу и цену небьющегося люмографа снизили на 9 грн 40 коп, ребята объединили свои деньги и купили три люмографа, отдав все деньги, которые у них были. Сколько стоил один люмограф до снижения цены?
2. 100 благородных рыцарей приняли участие в рыцарском турнире, причём все они обладали разным уровнем ловкости. Более ловкий всегда побеждал менее ловкого. В первый день все рыцари провели по одному бою (в бою соревнуются два рыцаря). На следующий день снова все провели по одному бою, но каждому достался другой противник. После этого принцесса поцеловала всех рыцарей, одержавших две победы. Какое наименьшее число рыцарей могла поцеловать принцесса?
3. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  отмечены середины его боковых сторон:  $P$  – середина  $AB$ ,  $Q$  – середина  $AC$ . На продолжении отрезка  $PQ$  за точку  $Q$  выбраны точки  $S$  и  $T$  так, что  $PQ = ST$  и точка  $S$  лежит между  $Q$  и  $T$ . Докажите, что  $AS = CT$ .
4. Число называется *псевдопростым*, если оно представимо в виде суммы некоторых двух различных простых чисел. Какое наибольшее количество последовательных натуральных чисел, каждое из которых больше 25, может оказаться псевдопростыми?