Областная олимпиада юных математиков, 11 класс, 2019 г.

I тур

1. Знайдіть усі розв'язки рівняння $\dfrac{2\cos 2x}{6-3\cos 3x}=\dfrac{\cos 2x+1}{\cos 3x+2}$, якщо $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

2. У гострокутному трикутнику ABC у якому $AB<AC$, точка M – середина сторони BC, K – середина ламаної BAC. Доведіть, що $\sqrt{2}\,KM>AB$.

3. Розглянемо таблицю $m\times n$ $m,n\geqslant 2$ (m рядків, що занумеровані числами 1, 2,…, m та n стовпчиків, що занумеровані числами 1, 2,…, n), яка заповнена натуральними числами. Нехай b_i – НСК (найменше спільне кратне) усіх чисел, що стоять в i-му рядку, $1\leqslant i\leqslant m$ і визначимо число B – НСД (найбільший спільний дільник) чисел $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$. Також нехай c_j є НСД усіх чисел, що стоять в j-му стовпчику, $1\leqslant j\leqslant n$, та визначимо число C – НСК чисел $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Чи можна стверджувати, що обов'язково або B ділиться націло на C, або навпаки, C ділиться націло на B?

4. Знайдіть усі додатні чисел x, y, z, що задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases} (x+1)(y+1)\leqslant (z+1)^2, \\ \left(\dfrac{1}{x}+1\right)\left(\dfrac{1}{y}+1\right)\leqslant\left(\dfrac{1}{z}+1\right)^2. \end{cases}$$

5. Чи існує зв'язна фігура F, що складається з клітин 1×1, яка задовольняє такі умови:
1) вона складається з s клітин 1×1 і не є прямокутником;
2) будь-який прямокутник завбільшки $k\times s$, де $k\geqslant s$ можна розрізати на фігурки, що співпадають з F?
Фігура, що складається з клітин 1×1, називається зв'язною, якщо з будь-якої її клітини можна дістатися будь-якої іншої, ходячи через сторони інших клітинок фігури.

II тур

1. Существуют ли положительные числа a, b, c, x, для которых выполнены равенства $a^2+b^2=c^2$ и $(a+x)^2+(b+x)^2=(c+x)^2$?

2. Какое наибольшее количество коней можно поставить на шахматной доске так, чтобы среди любых 6 коней нашлись два, которые бьют друг друга?

3. Последовательность $\{a_n\}$ задана условиями $a_1=1$ и $a_n=a_{n-1}+r_n^2$ при $n\geqslant 2$, где r_n – остаток от деления a_{n-1} на n. Какое наибольшее количество одинаковых членов может идти подряд в этой последовательности?

4. Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках P и Q. Окружность ω лежит внутри каждой из окружностей ω_1 и ω_2, касается ω_1 в точке K, касается ω_2 в точке L и проходит через середину отрезка PQ. Докажите, что касательные к ω в точках K и L пересекаются в точке, лежащей на общей касательной к ω_1 и ω_2.