Областная олимпиада юных математиков, 10 класс, 2019 г.

I тур

1. Розв'яжіть рівняння $\dfrac{\sqrt{x}+2}{\cos 2x+3}=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\cos 2x+1}$.

2. На дошці записане число 2019 . Катя та Микола по черзі (розпочинає Катя) роблять такі ходи: вони вибирають будь-який дільник d записаного на дошці числа N, і записують на дошці замість числа N число $N-(4d-1)$, якщо воно натуральне. Програє той, хто не зможе зробити хід за правилами. Хто може перемогти в цій грі, якщо кожний прагне перемогти?

3. Назвемо прямокутний трикутник ABC особливим, якщо довжини його сторін AB, BC та CA цілі числа, та на кожній з цих сторін є деяка точка X (відмінна від вершин $\triangle ABC$), для якої довжини відрізків AX, BX та CX – цілі числа. Знайдіть принаймні один особливий трикутник.

4. Нехай m та n – натуральні числа, причому жодне з них не кратне 6. Прямокутник $m\times n$ виклали квадратами 2×2 та 3×3. Доведіть, що цей прямокутник можна викласти квадратами принаймні одного з видів 2×2 або 3×3.

5. Знайдіть усі додатні чисел x, y, z, що задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases} (x+1)(y+1)\leqslant (z+1)^2, \\ \left(\dfrac{1}{x}+1\right)\left(\dfrac{1}{y}+1\right)\leqslant \left(\dfrac{1}{z}+1\right)^2. \end{cases}$$

II тур

1. Даны действительные числа x, y, z, не все из которых равны друг другу. Докажите, что $x+y+z=0$ тогда и только тогда, когда

$$x^2+xy+y^2=y^2+yz+z^2=z^2+zx+x^2.$$

2. Все клетки бесконечной клетчатой доски покрашены в желтый цвет. За один ход Игорь может выбрать некоторый квадрат 2×2 и перекрасить все клетки этого квадрата, кроме правой верхней: если клетка желтая, перекрасить ее в синий цвет, а если синяя, то в желтый. Сможет ли Игорь за конечное число ходов добиться того, чтобы ровно две клетки доски оказались синими?

3. Для каких натуральных a и b оба числа a^2b+3 и ab^2+3 являются точными кубами?

4. Около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность. Диагонали AC и BD пересекаются в точке P, а прямые DA и CB – в точке Q. Оказалось, что прямая PQ перпендикулярна AC. Докажите, что прямая PE перпендикулярна BC, где точка E – середина отрезка AB.