Областная олимпиада юных математиков, 9 класс, 2018 г.

I тур

1. Розв'яжіть систему рівнянь в натуральних числах x, y, z:

$$\begin{cases} x^3 - 6y^2 + 27z = 132, \\ y^3 - 9z^2 + 3x = 125, \\ z^3 - 3x^2 + 12y = -68. \end{cases}$$

2. Вчитель писав на дошці цифри $123\ldots8123\ldots8123\ldots$ послідовно у вказаному порядку доки не утворилося 2018-цифрове число. Після цього Андрій та Олеся грали в таку гру. По черзі (розпочинає Андрій) вони викреслювали по 2 цифри таким чином – перші дві цифри числа, що залишилося після попереднього ходу, останні дві цифри, або першу та останню цифри того числа. Гра закінчується, коли залишилося двоцифрове число. Перемагає Олеся, якщо це число ділиться на 4, інакше перемагає Андрій. Хто переможе за правильної гри обох гравців?

3. Доведіть для додатних чисел нерівність:

$$\frac{y}{2x+y} + \frac{z}{2y+z} + \frac{x}{2z+x} \geqslant 1.$$

4. Знайдіть усі трійки чисел (x, y, p), де x та y – натуральні, p – просте, що задовольняють рівність:

$$y\left(x^2 + p\right) - x\left(y^2 + p\right) = p.$$

5. Дано трикутник ABC, серединний перпендикуляр до сторони AC перетинає бісектрису трикутника AK у точці P, M – така точка, що $\angle MAC = \angle PCB$, $\angle MPA = \angle CPK$, і точки M та K лежать по різні боки від прямої AC. Доведіть, що пряма AK ділить відрізок BM навпіл.

II тур

1. Числа a и b – различные целые ненулевые корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$. Оказалось, что число $q - 2a$ является делителем числа $p + b$. Какие значения может принимать число b?

2. Биссектриса внешнего угла при вершине C треугольника ABC пересекает биссектрису внутреннего угла при вершине B в точке K. Докажите, что точка A лежит на диаметре описанной окружности треугольника BCK, проходящем через точку K.

3. На множестве целых чисел задана операция $*$, которая паре целых чисел a и b ставит в соответствие целое число $a * b$. Оказалось, что

$$a * (b + c) = b * a + c * a$$

для любых целых a, b и c. Докажите, что существует целое число n такое, что $a * b = n \cdot a \cdot b$ для всех пар a и b.

4. На плоскости задан правильный $2n$-угольник P. Будем говорить, что точка S, лежащая на стороне многоугольника P, видна из точки E, лежащей вне P, если отрезок SE не имеет общих точек с P, кроме S. Женя красит стороны многоугольника в три цвета (вершины будем считать бесцветными) так, что каждая сторона покрашена ровно в один цвет и все цвета использованы. Назовем раскраску *хорошей*, если из каждой точки, лежащей вне многоугольника, видны точки не более чем двух разных цветов. Сколько различных хороших раскрасок может получить Женя? *Две раскраски различны, если в них хотя бы одна сторона выкрашена в разные цвета.*