Областная олимпиада юных математиков, 8 класс, 2018 г.

I тур

1. Для натуральних чисел m та n порівняйте два числа

$$A = m^{526} + n^{526} \quad \text{та} \quad B = (m+n)\left(m^2+n^2\right)\left(m^4+n^4\right)\left(m^8+n^8\right)\ldots\left(m^{128}+n^{128}\right).$$

2. Вчитель писав на дошці цифри $123\ldots9123\ldots9123\ldots$ доки не утворилося 2018-цифрове число. Після цього Андрій та Олеся грали в таку гру. По черзі (розпочинає Андрій) вони викреслювали по 2 цифри таким чином: або дві перші цифри числа, що залишилося після попереднього ходу, або дві останні цифри, або першу та останню цифри того числа. Гра закінчується, коли залишилося двоцифрове число. Перемагає Олеся, якщо це число ділиться на 3, інакше перемагає Андрій. Хто переможе за правильної гри обох гравців?

3. У рівнобедреному трикутнику ABC з вершиною в точці B проведені висоти BH та CL. Точка D така, що $BDCH$ – прямокутник. Знайдіть величину кута DLH.

4. Відомо, що книжкова полиця вміщає 9 однакових товстих книг, але 10-та книга вже не влазить. Так само на неї можна поставити 15 однакових тонких книг, а 16-та вже не влізе. Чи можливо, щоб на полиці помістилися одночасно:
а) 7 товстих та 5 тонких книг?
б) 6 товстих та 6 тонких книг?

5. Капабланка та Альохін вирішили зіграти шаховий матч з 16 партій за такими правилами. Переможець першої партії отримував $1 = 3^0$ песо, переможець другої – $3 = 3^1$ песо, переможець третьої партії отримував $9 = 3^2$ песо і так далі. Якщо партія завершувалася внічию, то вони ділили призовий фонд партії навпіл. Виявилося, що по завершенню матчу Альохін заробив на 2018 песо більше, ніж Капабланка. Скільки партій виграв кожний з гравців?

II тур

1. Заданы попарно различные числа a, b, c. Известно, что прямые

$$y = a^2x + bc, \quad y = b^2x + ac \quad \text{и} \quad y = c^2x + ab$$

имеют общую точку. Докажите, что $a + b + c = 0$.

2. *Собственным* делителем натурального числа называется любой его делитель, отличный от 1 и самого этого числа. Натуральное число назовем *поразительным*, если квадрат его минимального собственного делителя на 1 больше, чем его максимальный собственный делитель. Найдите все поразительные числа и докажите, что других нет.

3. На вечеринку пришло больше трёх гостей. Известно, что у каждого участника вечеринки среди остальных есть хотя бы один знакомый и хотя бы один незнакомый. Докажите, что какие-то четверо гостей могут сесть за круглый стол играть в покер таким образом, чтобы каждый знал ровно одного из своих соседей.

4. В равнобедренном треугольнике ABC с вершиной в точке A угол при основании равен $35°$. Внутри этого треугольника нашлась такая точка P, что $\angle ACP = 5°$ и $\angle PBC = 25°$. Найдите угол APB.