Областная олимпиада юных математиков, 10 класс, 2018 г.

I тур

1. Розв'яжіть систему рівнянь в натуральних числах x, y:

$$\begin{cases} x^4 + 4y^3 + 6x^2 + 4y = -137, \\ y^4 + 4x^3 + 6y^2 + 4x = 472. \end{cases}$$

2. Для яких натуральних n квадрат $n \times n$ можна повністю покрити без накладання деякою кількістю прямокутників 4×1 та одним квадратиком 1×1?

3. Про деяке натуральне число A відомо, що воно має рівно 2018 натуральних дільників (включно з 1 та самим числом A), та ділиться націло на 2018. Доведіть, що число A не ділиться націло на 2018^2.

4. У гострокутному трикутнику ABC провели висоти BP і CQ. Нехай T – точка перетину висот трикутника PAQ. Виявилося, що $\angle CTB = 90^\circ$. Знайдіть у градусах величину $\angle BAC$.

5. Для додатних чисел x, y, z доведіть нерівність:

$$2 \cdot \left(\frac{x}{2x+y}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{y}{2y+z}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{z}{2z+x}\right)^2 + \frac{9xyz}{(2x+y)(2y+z)(2z+x)} \leqslant 1.$$

II тур

1. Задано натуральное число q. Про арифметическую прогрессию $a_1, a_2, a_3, \ldots$ известно, что для некоторых натуральных $m \neq k$ выполнено $S_m = qm^2$ и $S_k = qk^2$, где S_n – сумма первых n членов прогрессии. Найдите значение S_q.

2. Точки A и B лежат на окружности ω с центром в точке O, причём $\angle AOB = 90^\circ$. Серединный перпендикуляр к отрезку AO пересекает меньшую дугу AB окружности ω в точке K. Прямые OK и AB пересекаются в точке L. Докажите, что треугольник KBL равнобедренный.

3. Натуральное число a удовлетворяет следующему условию: для любого натурального n число $n^2a - 1$ имеет натуральный делитель, больший 1, который дает остаток 1 при делении на n. Докажите, что a – точный квадрат.

4. В различных клетках доски 4×4 стоит 15 шашек. За один ход можно выбрать шашку A, перепрыгнуть ею через соседнюю по стороне шашку B на следующую за ней клетку, если эта клетка существует и свободна. После этого шашка B снимается с доски. Какая из клеток доски могла изначально быть пустой, если известно, что можно за несколько ходов оставить на доске ровно одну шашку?