Областная олимпиада юных математиков, 10 класс, 2017 г.

I тур

1. Знайдіть найбільше дев'ятицифрове натуральне число, що задовольняє умови: усі його цифри різні, кожні дві сусідні цифри числа відрізняються не менше ніж на 2 та воно кратне 3.

2. У чемпіонаті взяли участь 8 команд. Чемпіонат проходив в одне коло, тобто кожна команда зіграла з кожною рівно один раз. При цьому грали кожного дня по турах, тобто у кожному турі грали усі команди, що були розбиті на пари. Після туру публікувалася таблиця, де команди розставлялися по місцях (з 1-го по 8-е) відповідно набраних очок. Після якого туру найшвидше може виявитись, що усі команди набрали різну кількість очок, якщо:
а) це був чемпіонат з баскетболу, де за перемогу нараховується 1 очко, за поразку очок не нараховується, а нічиїх не буває.
б) це був чемпіонат з футболу, де за перемогу нараховується 3 очки, за нічию – 1 очко, за поразку очок не нараховується.

3. Заданий квадрат $ABCD$. Нехай точка M – середина сторони BC, а H – основа перпендикуляра з вершини C на відрізок DM. Доведіть, що $AB = AH$.

4. Є набір з десяти карток, на яких записано по одній цифрі 0, 1, 2,…, 9. Андрій та Олеся по черзі (розпочинає Андрій) вибирають по одній картці та складають їх послідовно зліва направо так, що у кожного утворюється пятицифрове число (картку з цифрою 0 на своєму першому кроці жоден з гравців вибирати не може). Андрій перемагає у цій грі, якщо число, яке утворилося у нього, ділиться націло на 6. Інакше перемагає Олеся. Кожен з гравців прагне перемогти. Хто за таких умов може забезпечити собі перемогу?

5. Для довільних додатних чисел x, y, z доведіть нерівність

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \geqslant \frac{(3x-y-z)^2}{2(x+y+z)}.$$

II тур

1. Дана функция $f(x) = \sqrt[5]{3-x^3-x}$. Решите уравнение

$$f(f(x)) = f(x).$$

2. На заседание комитета парламента пришло n депутатов, причём любые двое либо единомышленники, либо идеологические противники. Журналисты посчитали, что у каждого депутата имеется ровно 10 идеологических противников среди присутствующих, причём если депутаты A и B – единомышленники, а A и C – противники, то B и C – противники. При каких значениях n это возможно?

3. Вокруг остроугольного треугольника ABC описана окружность Γ, а точка M – середина стороны BC. Точка N выбрана на дуге BC окружности Γ, не содержащей точку A, таким образом, что $\angle NAC = \angle BAM$. Точка R – середина отрезка AM, точка S – середина отрезка AN, а точка T – основание высоты треугольника ABC, проведенной из вершины A. Докажите, что точки R, S и T лежат на одной прямой.

4. Натуральное число n таково, что при любом натуральном значении k число $4(n^k+1)$ является точным кубом. Какие значения может принимать n?