Областная олимпиада юных математиков, 7 класс, 2015 г.

I тур

1. Сравните с нулем число A, где:
а) $A = 1-2-3+4+5-6-7+8+9-10-11+\ldots+2012+2013-2014-2015+2016$;
б) $A = \frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{2012}+\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}-\frac{1}{2015}+\frac{1}{2016}$.

В каждом из пунктов знаки перед последовательными числами идут таким образом – вначале один "+", а далее по очереди по два знака "−" и по два "+" и перед последним числом знак "+".

2. Разрежьте квадрат на 3 части прямолинейными разрезами так, чтобы из полученных частей можно было сложить тупоугольный треугольник.

После первого разреза перекладывать части разрезанного квадрата нельзя.

3. Назовем номер года *красочным*, если в его десятичной записи ни одна цифра не повторяется. Например, года с 2013 по 2019 – красочные, а 2020 – нет.
а) Найдите, когда в следующий раз образуется цепочка из семи красочных лет, идущих подряд.

б) Может ли в будущем появиться такая цепочка, содержащая больше семи красочных лет?

4. Квадрат 9×9 разбит на 81 квадратик 1×1, 8 из которых покрашены в черный цвет, а остальные – в белый. Из квадрата 9×9 вырезают полностью белый прямоугольник (или квадрат). Какую наибольшую площадь может гарантировано иметь этот прямоугольник? Вырезать разрешается только вдоль линий, разделяющих квадрат на единичные квадратики.

II тур

1. Двум муравьям, Толстому и Тонкому, нужно перенести по 150 г груза из точки A (где они сейчас находятся) в точку B, расстояние между которыми равно 150 метров. Толстый муравей ходит со скоростью 3 м/мин и может унести 5 г груза, а Тонкий – со скоростью 5 м/мин, но может унести лишь 3 г груза. Кто из них первым доставит все 150 г в точку B, если они начинают двигаться одновременно? (Скорость муравья с грузом не отличается от скорости муравья без груза.)

2. Отметьте на плоскости 6 точек и проведите 6 прямых так, чтобы на каждой прямой было по две отмеченные точки и по обе стороны от неё лежало по две отмеченные точки.

3. Шериф Джек считает, что если он поймал в некоторый день простое число бандитов, то ему повезло. В понедельник и вторник Джеку везло, а начиная со среды число пойманных им бандитов было равно сумме позавчерашнего и удвоенного вчерашнего числа. Какое максимальное число дней подряд Джеку могло везти?

4. В турнире участвовали 78 теннисистов, все разного возраста. Всего было сыграно 310 матчей, причём никакие двое не играли между собой более одного раза. Докажите, что можно выбрать четырёх теннисистов так, что либо самый молодой в этой четверке обыграл остальных трёх, либо самый старший в этой четверке обыграл остальных трёх.