

II турнір математичних боїв “Kharkiv Masters” ім. Н.І.Ахієзера Особиста усна олімпіада, старша ліга

Довивід

1. Чи існує восьмизначне число, що є точним квадратом, цифри якого йдуть у зростаючому порядку?
2. Розв'яжіть рівняння $x^2 + 3x + [x + 3] = 0$.
3. У квадратній таблиці 12×12 у деяких клітинках знаходяться фішки (не більше однієї фішки у клітинці). Знайдіть найбільшу можливу кількість фішок у таблиці, якщо у кожному рядку, кожному стовпчику та на кожній з діагоналей (будь якої довжини) знаходиться парна кількість фішок.
4. Трикутники ABC та XYZ мають спільне вписане коло, прямі BC та YZ співпадають, а пряма AX паралельна BC . Доведіть, що спільна хорда кіл, що описані навколо трикутників ABC та XYZ , містить точку дотику спільного вписаного кола з прямою BC . (Плотніков М.)

Вивід

5. Задано послідовність цілих чисел $(a_n)_{n=1}^{\infty}$: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ та для $n \geq 1$ виконується співвідношення $a_{n+2} = a_{n+1}^2 + (n+2)a_{n+1} - a_n^2 - na_n$. Доведіть, що множина простих чисел, що ділять хоча б один з елементів послідовності, не може виявитись скінченною.
6. Нехай T – деяка тріангуляція 100-кутника. Побудуємо конфігурацію $F(T)$ таким чином: візьмемо копію вихідного 100-кутника та будемо проводити діагональ d , якщо цієї діагоналі не було у T та при цьому існував чотирикутник, що містив цю діагональ, та ще дві вершини, причому всі сторони та діагоналі, крім d , цього чотирикутника були присутні у T . Нехай $i(T)$ – кількість пар діагоналей у $F(T)$, що мають точки перетину. Знайдіть найбільше можливе значення $i(T)$.