II турнір математичних боїв
“Kharkiv Masters” ім. Н.І.Ахієзера
Особиста усна олімпіада, молодша ліга

Довивід

1. Дійсні числа x, y та z задовольняють рівність $2x^2 + y^2 + z^2 = 2x(y + z)$. Доведіть, що для цих чисел також виконується рівність $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2(x + y)z$.

2. Шон та Рома проводять матч з хрестиків-нуликів, що складається з декількох партій. Переможець партії отримує 4 очки, а той що програв – 1 очко. Якщо ж партія завершується нічиєю, то обидва гравці отримують по 2 очки. По завершенні матча у хлопців в сумі виявилось 170 очок. Чи міг переможець набрати 90 очок?

3. У квадраті $ABCD$ на стороні CD обрано точку P. Точка Q на стороні AD така, що BQ – бісектриса кута PBA. З точки P опущено перпендикуляр PH на пряму BQ. Доведіть, що $BQ = 2PH$.

4. Знайдіть усі прості числа, квадрат яких може бути представлений у вигляді суми кубів двох натуральних чисел.

Вивід

5. На прямій відмічено 80 різних точок: 60 жовтих та 20 синіх. Виявилось, що на будь-якому відрізку з синіми кінцями лежать хоча б дві жовті точки. Доведіть, що хоча б на половині всіх відрізків з жовтими кінцями лежить не менше двох синіх точок.

6. На дошці написано n послідовних натуральних чисел у зростаючому порядку. Під кожним з цих чисел записано його дільник, менший за це число й більший за 1. Виявилось, що ці дільники також є послідовними натуральними числами, що йдуть у зростаючому порядку. Доведіть, що кожне з вихідних чисел більше за $\dfrac{n^k}{p_1 p_2 \ldots p_k}$, де p_1, p_2,..., p_k – всі прості числа, що менші за n.