

## II турнір математичних боїв “Kharkiv Masters” ім. Н.І.Ахієзера

### Математичний бій №4В, старша ліга

1. Є 9 ящиків із кульками (всього в ящиках 80 кульок) та порожній мішок. Кожного дня обирається ящик із найменшим числом кульок (якщо таких декілька, то обирається будь-який з них), і кульки з нього перекладаються у мішок, після чого у цей порожній ящик перекладають частину кульок із якогось іншого ящика. Яка найбільша кількість кульок могла виявитися у мішку через 8 днів?

2. Розв'яжіть рівняння:  $\frac{1}{[x]} + \frac{1}{[2x]} = \{x\} + \frac{1}{3}$ .

3. Два кола  $\gamma_1$  та  $\gamma_2$  перетинаються в точках  $A$  та  $B$ . Точки  $P, Q$  обрано на колах  $\gamma_1, \gamma_2$  відповідно так, що  $AP = AQ$ . Відрізок  $PQ$  перетинає кола  $\gamma_1$  та  $\gamma_2$  у точках  $M$  та  $N$  відповідно. Точка  $C$  – середина дуги  $BP$  кола  $\gamma_1$ , що не містить точку  $A$ , а точка  $D$  – середина дуги  $BQ$  кола  $\gamma_2$ , що не містить точку  $A$ . Прямі  $CM$  і  $DN$  перетинаються в точці  $E$ . Доведіть, що пряма  $AE$  перпендикулярна прямій  $CD$ .

4. Двоє по черзі зафарбовують клітинки дошки  $99 \times 99$ . Перший гравець зафарбовує по 2 клітинки, причому одна з них повинна бути на 2 рядки вище та на 2 стовпчики правіше за іншу. Другий гравець зафарбовує по 3 клітинки, що утворюють куточок. Програє той, хто не може зробити хід. Хто з гравців може забезпечити собі перемогу та як йому для цього треба грати?

5. Знайдіть усі натуральні числа  $d$ , для яких існує натуральне число  $k \geq 3$ , таке що числа  $d, 2d, 3d, \dots, kd$  можна записати у рядок, у якому сума будь-яких двох сусідніх чисел буде точним квадратом.

6. Знайдіть радіус описаного кола трикутника  $ABC$ , в якому висота та бісектриса, що проведені з вершини  $A$ , дорівнюють  $h$  та  $l$  відповідно, якщо відомо, що відстань між основами цих висоти та бісектриси дорівнює відстані між основою цієї бісектриси та серединою сторони  $BC$ . (Філіпповський Г.Б.)

7. Знайдіть усі додатні раціональні розв'язки  $(x, y)$  рівняння  $yx^y = y + 1$ .

8. Знайдіть усі такі додатні  $c$ , що для будь-яких додатних  $x, y, z$  виконується нерівність

$$\frac{x^3y + y^3z + z^3x}{x + y + z} + \frac{4c}{xyz} \geq 2c + 2.$$

9. Доведіть, що існує нескінченно багато непарних натуральних  $n$ , для яких число  $n! + 1$  є складеним.

10. Основи трапеції дорівнюють  $a$  і  $b$ . Її бокові сторони перпендикулярні. Яке найбільше значення може приймати площа трикутника, утвореного перетином середньої лінії трапеції та її діагоналей? (Філіпповський Г.Б.)