II турнір математичних боїв
“Kharkiv Masters” ім. Н.І.Ахієзера

Математичний бій №4, старша ліга

1. Є 9 ящиків із кульками (всього в ящиках 80 кульок) та порожній мішок. Кожного дня обирається ящик із найменшим числом кульок (якщо таких декілька, то обирається будь-який з них), і кульки з нього перекладаються у мішок, після чого у цей порожній ящик перекладають частину кульок із якогось іншого ящика. Яка найбільша кількість кульок могла виявитися у мішку через 8 днів?

2. Множина A складається з натуральних чисел та задовольняє умови:
а) Кожен елемент множини не більший за 2018;
б) Для будь-якої трьохелементної підмножини $S \subset A$, існують числа $m, n \in S$ такі, що $|n-m| \geqslant \sqrt{n}+\sqrt{m}$.
Знайдіть найбільшу можливу кількість елементів множини A.

3. Два кола γ_1 та γ_2 перетинаються в точках A та B. Точки P, Q обрано на колах γ_1, γ_2 відповідно так, що $AP = AQ$. Відрізок PQ перетинає кола γ_1 та γ_2 у точках M та N відповідно. Точка C – середина дуги BP кола γ_1, що не містить точку A, а точка D – середина дуги BQ кола γ_2, що не містить точку A. Прямі CM і DN перетинаються в точці E. Доведіть, що пряма AE перпендикулярна прямій CD.

4. Доведіть, що не існує таких натуральних чисел $a_1, a_2, \cdots, a_{2018}$, що усі числа $a_1^{2018}+a_2$, $a_2^{2018}+a_3$, $\ldots$, $a_{2018}^{2018}+a_1$ є степенями числа 5.

5. Позначимо через $\mathbb{R}_{>0}$ множину всіх додатних дійсних чисел. Знайдіть усі функції $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$, що для будь-яких додатних дійсних x та y справджується рівність $f(xy+f(x)) = f(f(x)f(y))+x$.

6. Коло ω з центром I вписане в нерівнобедрений гострокутний трикутник ABC. Позначимо B_1 та C_1 – проекції точок B та C на пряму AI. Точки X та Y обрано на відрізку BC так, що $\angle B_1XC_1 = \angle B_1YC_1 = 90^\circ$. Доведіть, що коло, описане біля трикутника AXY, дотикається ω.

6-1. *(Бій Харків+Маріуполь – Наукова Зміна.)* У нерівносторонньому трикутнику ABC точка I – центр вписаного кола, а точка O – центр описаного кола. Пряма s проходить через I й перпендикулярна прямій IO. Пряма ℓ симетрична прямій BC відносно s та перетинає відрізки AB й AC в точках K і L відповідно (обидві точки K і L відмінні від A). Доведіть, що центр описаного кола трикутника AKL лежить на прямій IO.

7. План картинної галереї має вигляд фігури, що складається з клітинок. Кожна клітинка фігури – це зал, причому від будь-якої клітинки фігури можна дістатися будь-якої іншої (дозволяється переходити з клітинки до сусідньої з нею по стороні). Наглядач, що знаходиться в одному з залів, стежить за всіма залами, у які з цієї клітинки можна потрапити одним ходом ферзя, не виходячи за межі галереї. Для заданого натурального $n > 2$, знайдіть найменше натуральне k, що в будь-якій галереї з n залами можна розставити k наглядачів так, щоб усі зали галереї були під наглядом.

8. Знайдіть усі такі додатні c, що для будь-яких додатних x, y, z виконується нерівність

$$\frac{x^3y+y^3z+z^3x}{x+y+z}+\frac{4c}{xyz} \geqslant 2c+2.$$

9. Доведіть, що існує нескінченно багато непарних натуральних n, для яких число $n!+1$ є складеним.

10. На столі в фокусника лежать 365 карток, на яких написано натуральні числа від 1 до 365 (кожне число зустрічається рівно один раз). Глядач може розкласти ці карти в ряд у будь-якому порядку. Фокусник не бачить, що написано на картах. Він може показати глядачеві на три карти та з'ясувати, яка з них містить найбільше число, а яка найменше. Фокусник хоче задати не більше 2000 питань і після цього вказати, у якому саме порядку лежать карти. Чи завжди йому вдасться це зробити?