II турнір математичних боїв
"Kharkiv Masters" ім. Н.І.Ахієзера

Математичний бій №4, молодша ліга

1. Задано прості числа p та q. Відомо, що $p+q^2$ є точним квадратом. Доведіть, що не існує жодного натурального n, для якого число p^2+q^n є точним квадратом.

2. У зростаючій послідовності a_1, a_2,..., a_k натуральних чисел $a_1 = 2019$ і $a_m+a_n \geqslant a_{m+n}+|m-n|$ при всіх натуральних $m, n \leqslant k$. Яка найбільша кількість членів може бути в цій послідовності?

3. Двоє по черзі зафарбовують клітинки дошки 99×99. Перший гравець зафарбовує по 2 клітинки, причому одна з них повинна бути на 2 рядки вище та на 2 стовпчики правіше за іншу. Другий гравець зафарбовує по 3 клітинки, що утворюють куточок. Програє той, хто не може зробити хід. Хто з гравців може забезпечити собі перемогу та як йому для цього треба грати?

4. Точка M – середина гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC. Серединний перпендикуляр до AB перетинає сторону BC у точці K. Пряма, що перпендикулярна CM та проходить через точку K, перетинає промінь CA в точці P (точка A лежить між C та P). Прямі CM та BP перетинаються в точці T. Доведіть, що $AC = TB$.

5. Доведіть, що для будь-якого натурального n між числами n та $3n$ знайдеться число, що не може бути представлене як сума двох доданків з однаковими сумами цифр.

6. У Шона є 185 монет, рівно 7 з яких фальшиві, але Шон не знає, які саме. Усі справжні монети важать однаково, всі фальшиві також важать однаково. Шону також відомо, що фальшива монета легша за справжню. Як Шону за 3 зважування на шалькових терезах без гир знайти 23 справжні монети?

7. На основі BC рівнобедреного трикутника ABC з кутом при вершині 100° відмічено точку D так, що $AC = DC$, а на бічній стороні AB – точку F так, що $DF \parallel AC$. Знайдіть, чому дорівнює кут DCF.

8. В десятковому записі числа $n!$ стерли деяку цифру й всі цифри, що їй дорівнювали. Чи могло число, що отримали, знову виявитись факторіалом, якщо n кратне 5?