II турнір математичних боїв
“Kharkiv Masters” ім. Н.І.Ахієзера

Математичний бій №3, середня ліга

1. Задано натуральне число n. На клітчастій дошці $2^n \times 2^n$ відмічені центри всіх клітинок. Сторона клітинки дорівнює 1. Яку найбільшу кількість відмічених точок можна обрати так, щоб усі попарні відстані між ними були натуральними?

2. Попарно різні числа x, y, z, t задовольняють системі

$$\begin{cases} axy + bx + cy + d = 0, \\ ayz + by + cz + d = 0, \\ azt + bz + ct + d = 0, \\ atx + bt + cx + d = 0. \end{cases}$$

Доведіть, що $b^2 + c^2 = 2ad$.

3. На гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC відмічено точки M та N такі, що $CB = NB$ та $AC = MA$. Точку X обрано всередині трикутника ABC таким чином, що трикутник MNX – рівнобедрений прямокутний з прямим кутом X. Знайдіть величину кута AXB.

4. Нехай $p > 2$ – просте число. Доведіть, що сума $1^{p-1} + 2^{p-1} + \ldots + (p-1)^{p-1}$ дає таку ж остачу при діленні на p^2, що й число $(p-1)! + p$.

5. Будемо називати клітинку прямокутника 11×13 *зайвою*, якщо після її вилучення з прямокутника, фігуру, що залишиться, можна буде розрізати на квадрати 2×2 та 3×3. Скільки зайвих клітинок у прямокутнику 11×13?

6. Нехай дійсні числа a, b, c такі, що $a > 0$ та $12a + 5b + 2c > 0$. Доведіть, що рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ не може мати двох дійсних коренів на інтервалі $(2; 3)$.

7. Числа a та b – два різні дільники натурального числа n, між якими немає інших дільників n. При цьому $n = a^2 + b$. Чому може дорівнювати число n?

8. Кола k_1 та k_2 перетинаються в точках A та B, причому k_1 проходить через центр O кола k_2. Пряма p перетинає k_1 в точках K та O і k_2 в точках L та M так, що L лежить між K та O. Точка P – це проекція L на пряму AB. Доведіть, що KP паралельна медіані трикутника ABM, що проведена з вершини M.

9. Для натурального числа n, розглянемо всі незростаючі функції $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$. Деякі з них мають стаціонарну точку (тобто існує таке число c, що $f(c) = c$), а деякі такої точки не мають. Знайдіть різницю між кількістю одних та інших таких функцій.

10. Радіус описаного кола трикутника ABC дорівнює R, точка I –інцентр трикутника. Позначимо через S_1, S_2 і S_3 площі трикутників ABI, BCI і CAI відповідно. Доведіть, що

$$\frac{R^4}{S_1^2} + \frac{R^4}{S_2^2} + \frac{R^4}{S_3^2} \geqslant 16.$$