

II турнір математичних боїв

“Kharkiv Masters” ім. Н.І.Ахієзера

Математичний бій №2, старша ліга

1. Назвемо невпорядковану пару натуральних чисел (p, q) *змішаною*, якщо одне з них просте, а інше складене. Знайдіть усі многочлени f з цілими коефіцієнтами, такі, що для будь-якої змішаної пари (p, q) пара $(f(p) + q, f(q) + p)$ також є змішаною.

2. Знайдіть усі натуральні значення n , для яких число $3^n + n^2 + 2019$ є точним квадратом.

2.1 (Заміна для бою Харків+Маріуполь – Ліцей 208.) Розв’яжіть у цілих числах рівняння

$$(x + x^2)(y + y^2) = (x + y)^2.$$

3. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что $f(x + y) = f(y)f(xf(y))$ для любых действительных x и y .

4. Знайдіть усі дійсні розв’язки системи рівнянь

$$\begin{cases} x^2 - yz = |y - z| + 1, \\ y^2 - zx = |z - x| + 1, \\ z^2 - xy = |x - y| + 1. \end{cases}$$

5. На екзамен прийшли 100 студентів. Викладач по черзі задає кожному студенту одне й те саме питання: «Скільки з 100 студентів отримає на цьому екзамені оцінку *здав*». У відповідь студент повинен назвати ціле число. Зразу після отримання відповіді студента викладач повідомляє всім, яку оцінку той отримав: *здав* або *не здав*. Після того, як усі студенти отримають оцінку, прийде інспектор й перевірить, чи є студенти, які дали правильну відповідь на запитання, але отримали оцінку *не здав*. Якщо хоча б один такий студент знайдеться, то викладач буде відсторонений від роботи, а оцінки всіх студентів замінять на *здав*. В іншому випадку жодних змін не відбудеться. Чи можуть студенти придумати стратегію, яка гарантує їм усім оцінку *здав*?

6. Деякі клітинки квадрата 99×99 пофарбовані в один з п’яти кольорів. Відомо, що клітинок кожного кольору однакова кількість, а також у жодному рядку та жодному стовпчику немає двох клітинок, пофарбованих у різні кольори. Знайдіть максимальну можливу кількість клітинок, що могли бути пофарбовані.

7. У трикутнику ABC виконується нерівність $AB > AC$. Основою висоти з вершини A на сторону BC є точка D . Точкою перетину бісектриси кута B трикутника ABC з прямою AD є точка K . Основою перпендикуляра з точки B на CK є точка M . Прямі BM та AK перетинаються у точці N . Пряма, що проходить через точку N паралельно до DM , перетинає AC у точці T . Доведіть, що BM є бісектрисою кута TBC .

8. Центр описаного кола трикутника ABC лежить на його вписаному колі. Знайдіть суму косинусів кутів трикутника ABC . (Філіпповський Г. Б.)

9. У країні декілька міст, деякі пари яких з’єднані двосторонніми авіарейсами. Відомо, що існує авіамаршрут, що проходить послідовно по 500 містах, у якому з кожного наступного міста виходить більше авіарейсів, ніж з попереднього. Яка найменша можлива кількість міст може бути у цій країні?

10. Задано послідовність $m_1 < m_2 < \dots < m_s$ з $s \geq 2$ натуральних чисел, жодне з яких не може бути записане як сума декількох інших різних членів послідовності. Для кожного натурального r такого, що $1 \leq r < s$, доведіть нерівність

$$r \cdot m_r + m_s \geq (r + 1)(s - 1).$$