II турнір математичних боїв
“Kharkiv Masters” ім. Н.І.Ахієзера

Математичний бій №2, молодша ліга

1. На дошці написані 2019 натуральних чисел. За один хід можна поділити найменше спільне кратне всіх чисел на дошці на одне з цих чисел, та записати результат замість цього числа. Чи вірно, що з будь-якого набору чисел можна такими операціями отримати набір, що складається з однакових чисел?

2. Натуральне число d будемо називати *цікавим*, якщо для довільних натуральних чисел x та y число d ділить $(x+y)^5-x^5-y^5$ тоді й тільки тоді, коли воно ділить $(x+y)^7-x^7-y^7$. Скінченною чи нескінченною є множина цікавих чисел?

3. Додатні числа x та y задовольняють умову $x^3-y^3>4x$. Доведіть, що $x^2>2y$.

4. Знайдіть усі пари натуральних чисел a та b, для яких число $2^{a!}+2^{b!}$ є точним кубом.

5. Квадрат 100×100 складається з одиничних квадратиків. Розглянемо всі можливі квадрати, що містяться в ньому, та складаються з одиничних квадратиків. Будемо говорити, що один такий квадратик міститься всередині іншого, якщо всі його квадратики належать іншому квадрату та не дотикаються до його сторін. Яку найбільшу кількість квадратів зі стороною, більшою за 1, можна вибрати так, щоб жоден з них не містився всередині іншого?

6. Художник Тюбик розфарбував усі натуральні числа так, що:
1) Всі непарні числа пофарбовані в синій колір;
2) Будь-яке натуральне n має той самий колір, що й $4n$;
3) У будь-якого натурального n його колір співпадає або з кольором числа $n+2$, або з кольором числа $n+4$.
Доведіть, що всі натуральні числа насправді пофарбовані у синій колір.

7. У трикутнику ABC точка H – ортоцентр. Точку D обрано на відрізку AC, а точку E на прямій BC таким чином, що $BC\perp DE$. Доведіть, що $EH\perp BD$ тоді й тільки тоді, коли пряма BD перетинає відрізок AE у його середині.

8. На сторонах AB та BC трикутника ABC відмічені точки K та L відповідно. Відрізки AL та CK перетинаються в точці P. Виявилось, що $KC=BC$ та $PC=PB=BL$. Доведіть, що $AL=AB$.