II турнір математичних боїв
“Kharkiv Masters” ім. Н.І.Ахієзера

Математичний бій №1, старша ліга

1. Послідовність a_1, a_2,... натуральних чисел задовольняє наступну умову: для кожного натурального $n > 2$ число a_n – це найменше натуральне число, що ділиться на n і не менше від a_{n-1}. Доведіть, що починаючи з деякого номера ця послідовність співпадає з деякою арифметичною прогресією.

2. Нехай просте число $p > 2$ та натуральні числа $m > 1$ і n такі, що число $\dfrac{m^{pn}-1}{m^n-1}$ – просте. Доведіть, що:

$$pn \mid (p-1)^n + 1.$$

3. Дійсні числа a, b, c задовольняють умову $a+b+c+ab+bc+ca+abc \geqslant 7$. Доведіть, що

$$\sqrt{a^2+b^2+2} + \sqrt{b^2+c^2+2} + \sqrt{c^2+a^2+2} \geqslant 6.$$

4. Нехай $P(x)$ – непостійний многочлен з дійсними коефіцієнтами, причому всі його корені дійсні. Відомо, що існує многочлен $Q(x)$ з дійсними коефіцієнтами такий, що для всіх дійсних x виконується рівність $(P(x))^2 = P(Q(x))$. Доведіть, що всі корені многочлена $P(x)$ однакові.

5. Два кола ω_1 та ω_2 перетинаються в точках A та B. Пряма ℓ проходить через точку B й перетинає кола ω_1 та ω_2 в точках C та D відповідно. Нехай H_c та H_d – ортоцентри трикутників ABC та ABD відповідно, а A_c та A_d – точки, що діаметрально протилежні A в колах ω_1 та ω_2 відповідно. Прямі H_cH_d та A_cA_d перетинаються в точці E, а H_cA_d та H_dA_c – в точці F. Доведіть, що середина відрізка EF лежить на прямій ℓ. *(Плотніков М.)*

6. У трикутнику ABC виконується рівність $AB = AC$, M – середина BC. Кола з діаметрами AC і BM перетинаються в точках M і P. Пряма MP перетинає пряму AB в точці Q, а точка R на AP така, що $QR \parallel BP$. Доведіть, що CP – бісектриса кута RCB.

7. Дано 200 різних дійсних чисел a_1, a_2,..., a_{100}, b_1, b_2,..., b_{100}. У клітинках таблиці 100×100 розставлені числа так, що на перетині i-го рядка з j-им стовпчиком стоїть число $a_i + b_j$. Виявилося, що добуток чисел у кожному рядку дорівнює 1. Доведіть, що добуток чисел у кожному стовпчику дорівнює -1.

8. На дошці 2019×2019 стоїть декілька пішаків і декілька тур, причому у кожній клітинці стоїть не більше однієї фігури. Одна тура б’є іншу туру, якщо вони стоять в одному рядку або в одному стовпчику й усі клітинки між ними порожні. Знайдіть найбільше p, для якого можна так розставити p пішаків і $p + 2019$ тур на дошці, що жодні дві тури не будуть бити одна одну.

9. На площині задано 2019 точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Яку найменшу кількість прямих потрібно провести, щоб гарантовано відділити всі точки одна від одної? (Дві точки відділені одна від одної, якщо існує принаймні одна пряма, відносно якої вони лежать по різні боки.)

10. На множині натуральних чисел задано операцію $'$, яка кожному натуральному числу n ставить у відповідність число n' і задовольняє наступні умови:
1) $1' = 0$;
2) $p' = 1$ для будь-якого простого p;
3) якщо $n = ab$, де a і b – натуральні, то $n' = a' \cdot b + a \cdot b'$.
Знайдіть усі натуральні числа n від 1 до 1000000000, для яких $n' = n$.