

II турнір математичних боїв “Kharkiv Masters” ім. Н.І.Ахієзера

Математичний бій №1, молодша ліга

1. Знайдіть найменше чотиризначне число \overline{abcd} , яке задовольняє рівність

$$\overline{abcd} = a \cdot \overline{bcd} + \overline{abc} \cdot d.$$

2. Усі натуральні дільники натурального числа n були розбиті на пари і в кожній парі підраховали суму чисел. Виявилось, що всі суми є простими числами. Доведіть, що всі вони різні.

3. Восьмикласниця Ліза придумала три правильні дроби (необов'язково всі нескоротні). У першого дроби знаменник на 1 більше за чисельник, у другого – на 2, у третього – на 3. При цьому виявилось, що сума першого й другого дроби дорівнює третьому. Які дроби придумала Ліза?

4. Для додатних чисел a та b доведіть, що виконується нерівність

$$\frac{a^2 + 7}{b + 3} + \frac{b^2 + 7}{a + 3} \geq 4.$$

5. У трикутнику ABC проведено медіану BM . На стороні AB відмічено точку K таким чином, що $\angle BMK = 90^\circ$. Виявилось, що $BK = BC$. Знайдіть кут ABM , якщо кут CBM дорівнює 60° .

6. Побудуйте прямокутний трикутник за основами його бісектрис. Дослідження роботи не потрібно. (Філіпповський Г.Б.)

7. У кожній клітинці прямокутної таблиці стоїть лицар або брехун. Кожне з них заявив, що в одному рядку з ним знаходиться більше лицарів, ніж в одному стовпчику. Доведіть, що кількість лицарів ділиться на число стовпчиків у таблиці.

8. Старанний Рома виписав усі натуральні числа, цифри яких йдуть у спадаючому порядку. Далі, в кожному такому числі він вставив знаки додавання і віднімання між сусідніми цифрами за порядком: “-”, “+”, “-”, “+”,... і обчислив результат (наприклад, для 97641 він отримав $9 - 7 + 6 - 4 + 1 = 5$). Після цього Рома додав усі отримані результати. Скільки в нього вийшло?