

Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2019 рік. 8 клас. 3 тур

1. Відрізки AB , BC та AD мають однакову довжину, і точка D належить відрізку BC . Доведіть, що серединний перпендикуляр до DC , бісектриса кута ADC і пряма AC проходять через одну точку.
2. Задано непарне просте число p . Натуральне число n є таким, що $n^2 - np$ – точний квадрат. Доведіть, що n – точний квадрат.
3. Задано натуральне число $n > 3$ й додатні числа a_1, a_2, \dots, a_n . Доведіть нерівність

$$\frac{a_1}{a_n + a_1 + a_2} + \frac{a_2}{a_1 + a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_{n-1} + a_n + a_1} < \left[\frac{n}{2} \right].$$

4. На дошці записано рядок $(1, 1)$. Кожну хвилину відбувається наступна операція. Рядок (a_1, a_2, \dots, a_n) розбивається на блоки послідовно розташованих однакових чисел так, щоб числа в сусідніх блоках були різні. Далі кожен блок (x, x, \dots, x) (n раз) видаляється, й на його місці записується (n, x) . Наприклад, через хвилину на дошці буде $(2, 1)$, а ще через хвилину – $(1, 2, 1, 1)$. Чи вірно, що, починаючи з певного моменту, на дошці завжди буде рядок довжиною більше 2019?