

Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2019 рік. 11 клас. 3 тур

1. Нехай P – точка перетину діагоналей AC та BD рівнобічної трапеції $ABCD$ з основами AB та CD . Описане коло трикутника ABP вдруге перетинає пряму BC в точці X . Точка Y на прямій AX є такою, що $DY \parallel BC$. Доведіть, що $\angle YDA = 2\angle YCA$.
2. Доведіть, що існує нескінченно багато пар взаємно простих чисел a та b , більших за 1 та таких, що $a^b + b^a$ ділиться на $a + b$.
3. Задано множину L , що складається з 1000 прямих на площині, жодні дві з яких не паралельні, їх жодні три не перетинаються в одній точці. Будемо казати, що пряма $l_1 \in L$ обмежує пряму $l_2 \in L$, якщо точки перетину l_2 з іншими прямими з L лежать по один бік від прямої l_1 . Доведіть, що в множині L існують дві прямі a та b , для яких одночасно виконуються дві умови: 1) пряма a обмежує пряму b ; 2) пряма b не обмежує пряму a .
4. Знайдіть усі многочлени $P(x)$ з цілими коефіцієнтами, що задовольняють умову: якщо для деяких дійсних s і t обидва числа $P(s)$ і $P(t)$ цілі, то $P(st)$ також ціле.