**Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2019 рік. 10 клас. 3 тур**

**1.** Точка $P$ розташована зовні кола $\Omega$. Дві дотичні, проведені з точки $P$, дотикаються кола $\Omega$ в точках $A$ та $B$. Точка $M$ – середина відрізка $BP$. Пряма $AM$ вдруге перетинає коло $\Omega$ в точці $C$, а пряма $PC$ – в точці $D$. Доведіть, що прямі $AD$ та $BP$ паралельні.

**2.** Задано просте число $p > 3$. Числа $a_1$, $a_2$,…, $a_{(p-1)/2}$ – перестановка чисел 1, 2,…, $(p-1)/2$. Для яких $p$ послідовність $a_1$, $a_2$,…, $a_{(p-1)/2}$ напевно можна відновити, якщо для кожних двох різних $i$ та $j$, що не перевищують $(p-1)/2$, відома остача від ділення на $p$ числа $a_i a_j$?

**3.** На площині відмічено множину $A$ з $n$ точок загального положення. Чи можна гарантувати, що на площині знайдуться декілька опуклих многокутників, що не перетинаються ані по границі, ані у внутрішніх точках, множина вершин яких співпадає з $A$, якщо а) $n = 8$; б) $n = 9$?

**4.** Послідовність $x_1, x_2, \ldots$ задається співвідношеннями $x_1 = 1$ та $x_{n+1} = x_n + \sqrt{x_n}$. Доведіть, що

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_{2019}} < 3.$$