

Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2018 год. 9 класс. 3 тур

1. В треугольнике ABC углы при вершинах B и C больше 45° . На сторонах AB и AC во внешнюю сторону построены прямоугольные равнобедренные треугольники ABE и ACF с гипотенузами BE и CF соответственно. На стороне BC во внутреннюю сторону построен как на гипотенузе прямоугольный равнобедренный треугольник BCT . Докажите, что треугольник EFT – равнобедренный прямоугольный.

2. У Жени и Даши есть три пакета конфет: в первом – 150 конфет, во втором – 100 конфет, а в третьем – 50 конфет. Они играют в игру по следующим правилам: ходы делаются по очереди, за один ход можно съесть одну или две конфеты из одного пакета, но нельзя брать из того пакета, из которого на предыдущем ходу брал другой игрок. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре, если первым ходит Женя?

3. В таблице 2018×2018 расставлены различные натуральные числа, не превосходящие $2 \cdot 2018^2$. В каждой строке и в каждом столбце посчитали НОД всех чисел. Могло ли оказаться, что все эти 4036 НОДов различны?

4. Для положительных чисел a, b, c , сумма которых равна 1, докажите неравенство:

$$\frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{b+c^2} + \frac{c}{c+a^2} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$