

Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2016 год. 8 класс. 3 тур

1. Решите уравнение $\{3\{2x\}\} = x$. (Тут $\{a\}$ – дробная часть числа a).
2. В равнобедренном остроугольном треугольнике ABC с основанием AC проведены высоты AA_1 и CC_1 . Точка H – ортоцентр треугольника ABC . Прямая CC_1 второй раз пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке P . Докажите, что прямая AA_1 касается описанной окружности треугольника HBP .
3. Во дворе дома стоит n столбов. Некоторые из них соединены проводами, причем известно, что можно пустить ток по проводам между любыми двумя столбами. Всего натянута k проводов. В доме поселился сумасшедший электрик. Каждую ночь он выходит во двор, подходит к какому-то столбу и с каждым проводом, идущим от этого столба, делает следующее: обрезает его, если он целый, или чинит, если провод обрзан. Изначально все провода были целыми. Найдите все пары натуральных чисел (n, k) , при которых для любого начального расположения проводов электрик сможет гарантированно добиться того, что все провода во дворе окажутся обрзаны и он сможет сдать их на металлолом.
4. Назовем натуральное число *красивым*, если оно представимо в виде суммы трех натуральных чисел $a < b < c$ таких, что c делится на b , а b делится на a . Найдите наибольшее натуральное число, не являющееся красивым.