Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики
2015 рік. 9 клас. 3 тур

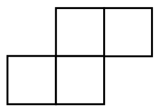
1. На круглому треку одночасно в одному напрямі почали рух з постійними але попарно різними швидкостями $n \geq 3$ велосипедистів. У одного з них є фляга з водою. У момент, коли відбувається зустріч двох велосипедистів, у одного з яких фляга, відбувається миттєва передача цієї фляги другому велосипедисту. Відомо, що зустріч трьох велосипедистів в одній точці неможлива.

> ***а)*** Чи може так трапитись, що існують два велосипедисти, до яких фляга жодного разу не потрапить, як довго б не їздили велосипедисти?
>
> ***б)*** Чи може так трапитись, що існує один велосипедист, до якого фляга жодного разу не потрапить, як довго б не їздили велосипедисти?

2. Для яких натуральних n квадрат $n \times n$ можна покрити Z-тетраміно (рис.) можливо у декілька шарів? Покрити у декілька шарів у даному випадку означає, що кожна комірка 1×1 покрита однаковою кількістю тетраміно, які можна повертати та перегортати у будь-якому напрямі. Жодна фігурка не повинна виходити за межі дошки.

3. Розв'яжіть у простих числах p, q, r рівняння:

$$pqr + 1 = 2^{q^2+1}.$$



4. Вписаний у коло чотирикутник $ABCD$ задовольняє умови $AD = BD$, M – точка перетину діагоналей чотирикутника, I – центр кола вписаного у ΔBCM, N – точка перетину прямої AC та описаного кола ΔBMI, відмінна від M. Доведіть, що $AN \cdot NC = CD \cdot BN$.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

22 лютого 2015 року