

Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2019 рік. 9 клас. 2 тур

- Ілля виписує в зошиті послідовність $1, 3, 5, 7, 9, \dots$ всіх натуральних чисел, які складаються лише з непарних цифр. Знайдіть число, яке буде записане на 2019-му місці в цій послідовності.
- Задано натуральне число $1 < n < 2019$. Для кожного $i = 1, 2, \dots, n$ визначено квадратний тричлен $S_i(x) = x^2 - 2019x + k_i$, де k_1, k_2, \dots, k_n — різні натуральні числа. Відомо, що тричлен

$$S_1(x) + S_2(x) + \dots + S_n(x)$$

має цілий корінь. Доведіть, що знайдеться таке i , що $k_i \geq 2019$.

- Чи існують 60 різних простих чисел p_1, p_2, \dots, p_{60} і натуральне число n такі, що

$$\frac{1}{p_1^2 + 1} + \frac{1}{p_2^2 + 1} + \dots + \frac{1}{p_{60}^2 + 1} = \frac{1}{n^2}?$$

- Висоти BB_1 та CC_1 гострокутного трикутника ABC перетинаються в точці H . Точки B_2 та C_2 обрано на відрізках BH та CH відповідно таким чином, що $BB_2 = B_1H$ та $CC_2 = C_1H$. Описане коло трикутника B_2HC_2 перетинає описане коло трикутника ABC в точках D та E . Доведіть, що трикутник DEH прямокутний.