

Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2019 рік. 8 клас. 2 тур

1. Яку найменшу кількість куточків з трьох клітин потрібно вирізати з квадрата 5×5 так, щоб більше не можна було вирізати жодного куточка?
2. Сума чисел x, y, z дорівнює нулю, а їхній добуток від'ємний. Доведіть, що число $\frac{x^2 + y^2}{z} + \frac{x^2 + z^2}{y} + \frac{y^2 + z^2}{x}$ є додатним.
3. Назвемо спосіб розбиття множини з $2n$ натуральних чисел на n пар *безквадратним*, якщо в жодній з пар добуток чисел не є точним квадратом. Відомо, що для даних $2n$ різних натуральних чисел існує безквадратний спосіб розбиття на пари. Доведіть, що тоді існує не менше $n!$ безквадратних способів розбиття цих $2n$ чисел на пари.
4. Діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці P . Відомо, що кути BAP, APB, CDP дорівнюють 52° . Серединний перпендикуляр до відрізка AD перетинає продовження медіани трикутника BSP , проведеної з вершини P , у точці Q . Знайдіть величину кута AQD .