Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2♡19 **рік. 11 клас. 2 тур**

1. Задано граф G, в якому $n \geqslant 3$ вершин та k ребер. Микита й Льоша грають у наступну гру. Спершу Микита обирає дві вершини A та B графа G на власний розсуд, і розміщує фішку у вершині A. Далі, Льоша й Микита по черзі роблять ходи: за один хід Льоша пересуває фішку вздовж деякого ребра графа, а Микита видаляє деяке ребро графа. Після того, як Микита розмістив фішку у вершині A, першим свій хід робить Льоша. Якщо фішка потрапить до вершини B, то виграє Льоша, в усіх інших випадках виграє Микита. Для заданого n знайдіть найбільше значення k, за якого Микита завжди має виграшну стратегію, незалежно від початкового графа.

2. Додатні числа a, b, c задовольняють умову $a+b+c+abc=4$. Доведіть, що

$$\left(1+\frac{a}{b}+ca\right)\left(1+\frac{b}{c}+ab\right)\left(1+\frac{c}{a}+bc\right)\geqslant 27.$$

3. Нехай точки M та N обрано на сторонах AB та BC трикутника ABC таким чином, що точка перетину відрізків AN та CM лежить на бісектрисі BL трикутника. Відомо, що кути ALB та MNB рівні. Доведіть, що MN – бісектриса кута ANB.

4. Знайдіть усі натуральні числа n, для яких виконується умова: для будь-якого цілого числа k існує таке ціле число a, що a^3+a-k ділиться на n.