

Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2019 рік. 1 клас. 2 тур

1. Яку найменшу кількість куточків з трьох клітин потрібно вирізати з квадрата 6×6 так, щоб більше не можна було вирізати жодного куточка?
2. Графіки двох квадратних тричленів перетинаються в точках A та B . Через вершину O першого з них проведено прями OA та OB , які перетинають другий графік у точках C та D . Доведіть, що пряма CD паралельна осі абсцис.
3. Висоти, проведені з вершин A , B та C гострокутного трикутника ABC , перетинають сторони трикутника в точках A_1 , B_1 , C_1 відповідно, а також перетинають його описане коло в точках A_2 , B_2 , C_2 відповідно. Пряма A_1C_1 перетинає описані кола трикутників AC_1C_2 та CA_1A_2 в точках P та Q , відмінних від A_1 та C_1 . Доведіть, що описане коло трикутника PQB_1 дотикається до прямої AC .
4. Задано натуральні числа a та k такі, що $k < a$. Дві послідовності натуральних чисел $r_1 < r_2 < \dots < r_n$ та $s_1 < s_2 < \dots < s_n$ задовольняють умову

$$(a^{r_1} + k)(a^{r_2} + k) \dots (a^{r_n} + k) = (a^{s_1} + k)(a^{s_2} + k) \dots (a^{s_n} + k).$$

Доведіть, що ці послідовності однакові.