

## Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2016 год. 9 класс. 2 тур

1. Четверка натуральных чисел  $(p, a, b, c)$  называется *интересной*, если выполнены условия:

- 1)  $p$  – простое нечетное число;
- 2) числа  $a, b, c$  попарно различны;
- 3) числа  $ab + 1, bc + 1$  и  $ca + 1$  делятся на  $p$ .

Докажите, что для всех интересных четверок выполнено неравенство  $p + 2 \leq \frac{a + b + c}{3}$ .

2. В разные места палки длиной 1 метр посадили 2016 божьих коровок. Каждая божья коровка бежит по палке либо в одну, либо в другую сторону со скоростью 1 см/с. Если две божьих коровки сталкиваются, то они разворачиваются и бегут в противоположные стороны. Если божья коровка добегает до любого из концов палки, то она улетает. Какое максимальное число столкновений божьих коровок могло произойти?

3. Дан выпуклый четырехугольник  $KLMN$ , в котором  $\angle NKL = 90^\circ$ . Пусть  $P$  – середина отрезка  $LM$ . Оказалось, что  $\angle KNL = \angle MKP$ . Докажите, что  $\angle KNM = \angle LKP$ .

4. Даны многочлены  $P(x) = ax^3 + (b-a)x^2 - (c+b)x + c$  и  $Q(x) = x^4 + (b-1)x^3 + (a-b)x^2 - (c+a)x + c$ , где  $a, b, c$  – ненулевые действительные числа. Известно, что  $P(x)$  имеет три различных действительных корня  $x_1, x_2, x_3$ , которые являются также корнями многочлена  $Q(x)$ .

а) Докажите, что при  $b > 0$  выполнено неравенство  $abc > 16$ .

б) Найдите все возможные целые значения  $a, b, c$ .