Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2016 год. 11 класс. 2 тур

1. На доске написано 100 квадратных трехчленов

$$f_1(x) = ax^2 + bx + c_1,$$

$$f_2(x) = ax^2 + bx + c_2,$$

$$\dots$$

$$f_{100}(x) = ax^2 + bx + c_{100}.$$

Соня выяснила, что каждый из них имеет по два действительных корня. Она выбрала у каждого трехчлена $f_i(x)$ один из корней и обозначила его x_i ($1 \leqslant i \leqslant 100$). Затем, Соня посчитала сумму $f_2(x_1) + f_3(x_2) + \ldots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100})$. Какое число она могла получить?

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ на стороне AB выбраны точки P и Q (точка P находится между точками A и Q), а на стороне CD выбраны точки R и T (точка R находится между C и T). Оказалось, что $AP = PT = TD$ и $QB = BC = CR$. Кроме того, около четырехугольника $BCTP$ можно описать окружность. Докажите, что около четырехугольника $ADRQ$ тоже можно описать окружность.

3. Простое число p и различные натуральные числа m и n таковы, что p^2 является средним арифметическим чисел m^2 и n^2. Докажите, что число $2p - m - n$ является или квадратом, или удвоенным квадратом целого числа.

4. Даша и Женя играют в следующую игру: у них есть конечное множество натуральных чисел A, известное обоим игрокам. Даша выбирает одно из чисел a множества A, но не говорит Жене, какое именно. Женя может называть произвольное натуральное число b (не обязательно из множества A). Даша должна сказать, сколько делителей имеет число ab. Докажите, что Женя может, задав один вопрос, выяснить, какое число выбрала Даша.