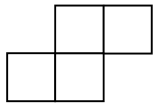
***Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики***
***2015 рік. 10 клас. 2 тур***

***1.*** Дійсні числа $x,\ y,\ z$ такі, що $x < y < z < 6$. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{y-x}+\dfrac{1}{z-y}\le 2, \\ \dfrac{1}{6-z}+2\le x. \end{cases}$$



**2.** Для яких натуральних $n$ квадрат $n\times n$ можна покрити $Z$-тетраміно (рис.) можливо у декілька шарів? Покрити у декілька шарів у даному випадку означає, що кожна комірка $1\times 1$ покрита однаковою кількістю тетраміно, які можна повертати та перегортати у будь-якому напрямі. Жодна фігурка не повинна виходити за межі дошки.

**3.** Вписаний у коло чотирикутник $ABCD$ задовольняє умови $AD = BD$, $M$ – точка перетину діагоналей чотирикутника, $I$ – центр кола вписаного у $\Delta BCM$, $N$ – точка перетину прямої $AC$ та описаного кола $\Delta BMI$, відмінна від $M$. Доведіть, що $AN\cdot NC = CD\cdot BN$.

**4.** Послідовність $(a_n)$, $n = 0, 1, 2, ...$ задана умовами $a_0 = 2$, $a_1 = 4$, та $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n a_{n-1} + a_n + a_{n-1}$ для усіх натуральних $n$. Знайдіть усі прості числа $p$ для яких існує натуральне $m$ таке, що $p$ ділить число $a_m - 1$.

*На виконання завдання відводиться 4 години*
*Кожна задача оцінюється в 7 балів*
22 лютого 2015 року