Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2015 год. 9 класс. 2 тур

1. Назовем натуральное число *интересным*, если сумма его цифр – простое число. Какое наибольшее количество интересных чисел может быть среди пяти подряд идущих натуральных чисел?

2. В четырехугольнике $ABCD$ выполнены равенства $\angle BCA + \angle CAD = 180°$ и $AB = AD + BC$. Докажите, что $\angle BAC + \angle ACD = \angle CDA$.

3. Функция $f(x)$ определена для $x \geqslant 3$ следующим образом:

$$f(x) = \frac{-x + x\sqrt{4x-3}}{2}.$$

Последовательность чисел a_1, $a_2, \ldots$, такова, что $a_1 > 3$, $a_{2015} = 2015$ и для всех натуральных n выполнено соотношение $a_{n+1} = f(a_n)$. Найдите значение следующего выражения:

$$a_1 + \frac{a_2^3}{a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2} + \frac{a_3^3}{a_2^2 + a_2a_3 + a_3^2} + \ldots + \frac{a_{2015}^3}{a_{2014}^2 + a_{2014}a_{2015} + a_{2015}^2}.$$

4. Рассмотрим разбиение правильного n-угольника на $n-2$ треугольника $(n-3)$-мя диагоналями, непересекающимися внутри n-угольника. Будем называть такое разбиение *двухцветной триангуляцией*, если все треугольники разбиения можно покрасить в синий и желтый цвета так, чтобы треугольники с общей стороной были покрашены в разные цвета. Найдите все натуральные числа $n \geqslant 4$, для которых существует такая двухцветная триангуляция, что для каждой вершины A n-угольника количество синих треугольников, для которых A является вершиной, больше количества желтых треугольников, для которых A является вершиной.