

Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2013 год. 8 класс. 2 тур

1. Пчелы продают мед двух видов: правильный и неправильный. Правильный мед (без стоимости горшка) ровно вдвое дороже неправильного (без стоимости горшка). Кроме того, Пчелы принимают пустые горшки из-под меда в обмен на горшки с медом (при этом суммарная стоимость пустых горшков равна суммарной стоимости горшков с медом). У Винни-Пуха есть 20 пустых горшков. Он хочет обменять их на несколько полных горшков в подарок ослику Иа-Иа так, чтобы пустых горшков у него не осталось. Сколько полных горшков сможет получить Винни-Пух, если 12 горшков с неправильным медом стоят столько же, сколько 7 горшков с правильным? (Все горшки имеют одинаковый размер и стоят одинаково.)

2. Есть доска 100×100 все клетки которой белые. Раз в минуту Влад может закрасить четыре клетки, стоящие на пересечении некоторых двух столбцов и двух строк, в черный цвет. Клетки могут быть покрашены несколько раз, но после каждого хода должна появиться хотя бы одна новая закрашенная клетка. Какое наибольшее время Влад может посвятить этому увлекательному занятию?

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ оказалось, что $\angle CBD = 2\angle ADB$, $\angle ABD = 2\angle BDC$ и $AB = BC$. Докажите, что $AD = CD$.

4. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, которые представимы в виде суммы квадратов четырех натуральных чисел единственным образом. (Способы, отличающиеся перестановкой слагаемых, считаются одинаковыми.)