

Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2019 рік. 9 клас. 1 тур

1. Знайдіть усі пари цілих чисел x та y , що задовольняють рівність $x^2 + y^2 = 2x + 2y + xy$.
2. Нехай I – центр вписаного кола гострокутного трикутника ABC . На сторонах AB, BC, CA відмітили точки P, Q, R відповідно таким чином, що $AP = AR$ і $BP = BQ$, а $\angle PIQ = \angle BAC$. Доведіть, що $QR \perp AC$.
3. Нехай a, b, c – довжини сторін деякого трикутника. Доведіть нерівність

$$(a + b)\sqrt{ab} + (a + c)\sqrt{ac} + (b + c)\sqrt{bc} > \frac{(a + b + c)^2}{2}.$$

4. По клітинках квадрата 3×3 повзає змійка довжини k . Положенням змійки в деякий момент часу будемо називати впорядкований набір (c_1, \dots, c_k) з k клітинок квадрата, такий, що клітинки c_1, \dots, c_k попарно різні, й для кожного $i = 1, \dots, k - 1$ клітинки c_i та c_{i+1} мають спільну сторону. Змійка може пересуватися наступним чином: якщо в деякий момент її положення – (c_1, \dots, c_k) , а клітинка c не співпадає із жодною з клітинок c_1, \dots, c_k і має з c_1 спільну сторону, то за одну секунду змійка може змінити своє положення на (c, c_1, \dots, c_{k-1}) . Будемо казати, що змійка розвернулася, якщо в початковий момент часу її положення було (c_1, c_2, \dots, c_k) , а через деякий час воно стало $(c_k, c_{k-1}, \dots, c_1)$. Відомо, що змійка змогла розвернутися для деякого початкового положення. Для якого найбільшого k це могло трапитися?