

## Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2019 рік. 11 клас. 1 тур

1. Знайдіть усі пари натуральних чисел  $a$  та  $b$ , що задовольняють рівність  $a^{a-1} = 4b^2 + 2b + 3$ .
2. На стороні  $AC$  трикутника  $ABC$  обрано точки  $P$  та  $Q$ . Пряма  $BQ$  перетинає коло  $\omega$ , описане навколо трикутника  $ABC$ , в точці  $R$ . Доведіть, що друга точка перетину описаного кола трикутника  $PQR$  та кола  $\omega$  не залежить від вибору точки  $Q$ .
3. Знайдіть усі сюр'єктивні функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такі, що для будь-яких  $x, y \in \mathbb{R}$  виконується рівність

$$f(x + f(x) + 2f(y)) = f(2x) + f(2y).$$

4. На дуже віддаленій планеті мешкають 2000 інопланетян, кожен з яких або лицар, або брехун. Космічний мандрівник прибув на планету з вагами з двома шальками без гир. Йому відомо, що інопланетяни важать  $2, 4, 8, \dots, 2^{2000}$  кг, але він не знає, хто скільки важить. Ваги мандрівника показують вірний результат, якщо на вагах лицарів не менше, ніж брехунів, та протилежний, якщо брехунів на вагах більше, ніж лицарів. За яке найменше число зважувань він може гарантовано визначити найважчого мешканця? (Під час будь-якого зважування обидві шальки повинні бути непорожніми.)