

Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2019 рік. 10 клас. 1 тур

1. Знайдіть усі натуральні n , для яких число $1 + \lceil \sqrt{2n} \rceil$ є дільником $2n$.
2. Пряма l дотикається кола S_1 у точці X і кола S_2 у точці Y . Проведено пряму m , яка паралельна l і перетинає S_1 у точці P та S_2 у точці Q . Доведіть, що відношення $XP : YQ$ не залежить від вибору прямої m .
3. Додатні числа x, y, z задовольняють умову $xy + yz + zx = x + y + z$. Доведіть, що

$$\frac{1}{x^2 + y + 1} + \frac{1}{y^2 + z + 1} + \frac{1}{z^2 + x + 1} \leq 1.$$

4. У Роми є порожня шахівниця. Він виставляє на неї фішки по черзі. Фішку можна ставити лише у вільну клітинку, яка межує по стороні хоча б з трьома вільними клітинками. Яку найбільшу кількість фішок Рома зможе виставити на дошку за такими правилами?