

Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2016 год. 9 класс. 1 тур

1. Найдите все целые x, y, z , удовлетворяющие системе
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2(yz + 1), \\ x + y + z = 2016. \end{cases}$$

2. Обозначим $p(n)$ – наибольший простой делитель натурального числа $n \geq 2$. Найдите все натуральные числа $n \geq 2$, для которых выполнено равенство

$$p(n) + [\sqrt{n}] = p(n + 1) + [\sqrt{n + 1}].$$

3. В треугольнике ABC точка H – ортоцентр, а точка O – центр описанной окружности. Точка K – середина отрезка AH . Точка P выбрана на отрезке AC таким образом, что $\angle BKP = 90^\circ$. Докажите, что прямые OP и BC параллельны.

4. В прямоугольнике, состоящем из m строк и n столбцов ($m \leq n$), некоторые клетки покрашены в черный цвет, а остальные в белый. Известно, что раскраски любых двух строк различны. Женя хочет покрасить целиком несколько столбцов в красный цвет так, чтобы по прежнему у любых двух строк раскраски были различны. Какое наибольшее число столбцов он наверняка может покрасить, независимо от начальной раскраски таблицы.