

Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2016 год. 11 класс. 1 тур

1. Будем называть *важным* натуральный делитель q натурального числа m , если m делится также на $q + 1$. Докажите, что количество важных делителей числа m не превосходит половины числа всех делителей m .

2. У Даши и Жени есть белая доска, в которой 3 строки и 239 столбцов. Они играют в следующую игру: по очереди закрашивают в черный цвет прямоугольники 1×3 , причем Даша закрашивает горизонтальные прямоугольники, а Женя – вертикальные. Каждая клетка может быть закрашена не более одного раза. Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре, если начинает Даша?

3. Докажите, что для положительных чисел x, y, z , удовлетворяющих условию $x^2 + y^2 + z^2 \leq x + y + z$, выполнено неравенство

$$\frac{x^2 + 3}{x^3 + 1} + \frac{y^2 + 3}{y^3 + 1} + \frac{z^2 + 3}{z^3 + 1} \geq 6.$$

4. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AK . Прямая AK пересекает описанную окружность этого треугольника в точке D . Точки E и F – основания высот треугольника ABC , проведенных из вершин B и C соответственно. Точка H – ортоцентр треугольника ABC , а точка T – середина отрезка AH . Прямая, параллельная EF и проходящая через точку T , пересекает прямые AB и AC в точках X и Y соответственно. Докажите, что $\angle XDF = \angle YDE$.