

Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2016 год. 10 класс. 1 тур

1. На координатной плоскости нарисуйте ГМТ, координаты которых удовлетворяют равенству

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{2}.$$

2. Точка T выбрана на высоте BH остроугольного треугольника ABC . Окружность, описанная около треугольника ABT , пересекает сторону BC в точке P . Прямая PT пересекает сторону AC в точке Q . Докажите, что центр описанной окружности треугольника APQ лежит на прямой AB .

3. У Сони есть таблица 11×11 . Она хочет покрасить клетки этой таблицы в несколько цветов так, чтобы выполнялось следующее условие: если в некоторой строке есть две клетки одного цвета, то снизу от более правой из них больше нет клеток этого цвета. Какое наименьшее количество цветов должна использовать Соня?

4. Назовем перестановку (a_1, a_2, \dots, a_n) чисел $\{1, 2, \dots, n\}$ *хорошей*, если для любых натуральных $i < j < k \leq n$ число $a_i + a_k - 2a_j$ не делится на n . Найдите все натуральные $n \geq 3$, для которых существует хорошая перестановка чисел $\{1, 2, \dots, n\}$.