Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2015 год. 11 класс. 1 тур

1. Решите в натуральных числах уравнение $x \cdot y! + 2y \cdot x! = z!$.

2. Продолжения медиан AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекают его описанную окружность в точках A_0, B_0 и C_0 соответственно. Оказалось, что площади треугольников ABC_0, AB_0C и A_0BC равны. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

3. Множество точек на плоскости называется красивым, если выполнены следующие условия:
1) никакие три точки множества не лежат на одной прямой;
2) точки раскрашены в несколько цветов;
3) если три точки множества образуют треугольник с углом не меньшим $120°$, то ровно две из этих точек покрашены одинаково.
Какое наибольшее число точек может быть в красивом множестве?

4. Найдите все многочлены $P(x)$ с целыми коэффициентами, старший из которых равен 1, такие, что существует такое натуральное $c > 1$, что для любого натурального n существует такое натуральное m, что $cP(n) = P(m)$.