

Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2015 год. 9 класс. 1 тур

1. Найдите все вещественные a и b , удовлетворяющие системе
$$\begin{cases} a^4 + a^2b^2 + b^4 = 133, \\ a^2 + ab + b^2 = 19. \end{cases}$$
2. По кругу лежат 2014 карамелек: желтых и синих. Даша может съесть две одноцветные конфеты, между которыми нет других конфет. Тимур заметил, что таким образом Даша может съесть все конфеты, и поменял местами две соседние разноцветные конфеты. Докажите, что теперь Даша не сможет съесть все конфеты.
3. Натуральные числа k и m ($k > m$) таковы, что $km(k^2 - m^2)$ делится на $k^3 - m^3$. Докажите, что $(k - m)^3 > 3km$.
4. В неравностороннем треугольнике ABC провели биссектрисы угла ABC и угла, смежного с ним. Они пересекли прямую AC в точках B_1 и B_2 соответственно. Из точек B_1 и B_2 провели касательные к окружности, вписанной в треугольник ABC , отличные от прямой AC . Они касаются этой окружности в точках K_1 и K_2 соответственно. Докажите, что точки B , K_1 и K_2 лежат на одной прямой.