Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2015 год. 8 класс. 1 тур

1. Найдите все такие натуральные числа a, b и c, что $a < b$, $a + b = c$ и $a^3 + b^3 = c^2$.

2. Настя и Женя играют в игру на доске 8×8. Каждым ходом Настя выбирает клетчатый квадрат размером 1×1 или 2×2, все клетки которого еще не окрашены, а Женя красит его в красный, желтый или зеленый цвет так, чтобы квадраты, покрашенные в один цвет, не имели общего отрезка границы. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Кто из игроков может выиграть, независимо от игры соперника?

3. Окружность γ описана вокруг остроугольного треугольника ABC. Перпендикуляр, опущенный на AB из точки C, пересекает AB в точке D, а окружность γ в точке E. Биссектриса угла C пересекает AB в точке F, а окружность γ в точке G. Прямая GD повторно пересекает γ в точке H, а прямая HF повторно пересекает γ в точке I. Докажите, что $AI = EB$.

4. Алина написала на доске натуральное число $n \geqslant 5$. Рома выбирает простой делитель p числа n, вытирает n и записывает вместо него число $\dfrac{n + p^2}{p}$. С новым числом он проделывает ту же операцию и т. д. Докажите, что, независимо от действий Ромы, на доске в какой-то момент окажется число 5.