

Отбор на Всеукраинскую олимпиаду по математике. 2014 год. 11 класс. 1 тур

1. Найдите все такие x , что среди четырех чисел $x - \sqrt{2}$, $x - 1/x$, $x + 1/x$, $x^2 + 2\sqrt{2}$ ровно одно не является целым.
2. Треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O . Окружность, построенная на AO как на диаметре, пересекает описанную окружность треугольника OBC в точке S . Касательные к ω в точках B и C пересекаются в точке P . Докажите, что точки A , S и P лежат на одной прямой.
3. Вершины связного графа нельзя покрасить меньше чем в $n + 1$ цвет так, чтобы соседние вершины были разного цвета. Докажите, что можно удалить из графа $\frac{n(n-1)}{2}$ ребер без потери связности.
4. Найдите все пары (p, n) , состоящие из простого числа p и натурального числа n , такие, что число $\frac{n^p + 1}{p^n + 1}$ – натуральное.