

## Олимпиада по математике ХФМЛ №27, 2019 г., 11 класс

1. Докажите, что функция  $f(x) = \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin x + \cos x}$ ,  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  – нечетна.
2. Шон назвал пять трехзначных простых чисел, а Рома посчитал их попарные разности. Обязательно ли одна из разностей делится на 12?
3. Можно ли какие-нибудь 10 последовательных натуральных чисел расположить на каркасе тетраэдра – по одному числу в вершинах и по одному числу в серединах ребер – так, чтобы в середине каждого ребра стояло среднее арифметическое чисел, записанных на концах этого ребра?
4. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} x + y^2 + z^4 = 0, \\ y + z^2 + x^4 = 0, \\ z + x^2 + y^4 = 0? \end{cases}$$

5. Точки  $A_0$  и  $B_0$  лежат внутри параллелограмма  $ABCD$ , а точки  $C_0$  и  $D_0$  – вне его. Известно, что все стороны восьмиугольника  $AA_0BB_0CC_0DD_0$  равны. Докажите, что точки  $A_0, B_0, C_0, D_0$  лежат на одной окружности.
6. В стране  $N$  городов. Некоторые пары городов соединены двусторонними авиарейсами, каждый рейс имеет цену, большую 1000 тугриков, причем из любого города можно добраться до любого другого (возможно, с пересадками). Компания публикует сборник, в котором для каждой из  $N(N-1)/2$  пар городов указана минимальная цена, которую надо заплатить, чтобы добраться от одного из них до другого; в конце сборника указывается сумма всех этих  $N(N-1)/2$  чисел. В некоторый момент компания уменьшила стоимость одного из рейсов на 1000 тугриков. Докажите, что итоговая сумма в новом сборнике будет отличаться от старой не более, чем на  $250N^2$  тугриков.