

Олимпиада по математике ХФМЛ №27, 2019 г., 10 класс

1. Докажите, что сумма попарных произведений трех последовательных натуральных чисел не может оказаться равна 20192019.

2. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 6y \leq 0, \\ y^2 - 2xy + 9 \leq 0. \end{cases}$$

3. На параболе $y = x^2$ все пары точек, обе координаты которых – целые числа по модулю больше 1, соединили отрезками, а затем выкинули из луча Oy все точки пересечения с этими отрезками. Докажите, что у всех оставшихся на луче Oy целых точек с ординатами, большими 1, координаты по y – простые числа.

4. Клетки доски 2019×2019 раскрашены в шахматном порядке в черный и белый цвета так, что угловые клетки – черные. Для каждой пары разноцветных клеток рисуется вектор, идущий из центра черной клетки в центр белой. Докажите, что сумма всех нарисованных векторов равна нулю.

5. Биссектрисы AA_1 , BB_1 , CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке I . Серединный перпендикуляр к отрезку BB_1 пересекает прямые AA_1 и CC_1 в точках A_0 и C_0 соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников A_0IC_0 и ABC касаются.

6. В стране 100 городов, каждые два из которых соединены дорогой. На каждой дороге введена положительная плата за проезд. Власти закрыли k дорог на ремонт, и в результате для любых двух городов, либо самый дешевый маршрут между ними вырос в цене, либо теперь вообще отсутствует путь между ними. При каком наименьшем k такое могло произойти?