

Олимпиада по математике ХФМЛ №27, 2019 г., 9 класс

1. В салуне на Диком Западе стоит автомат, который принимает карточки с числами. Если на карточке написано число x , при котором $x^2 - 9x + 13 < 0$, то автомат наливает в стакан пиво. Если же написано число x , при котором $x^2 + x - 5 < 0$, то автомат наливает в стакан молоко. Сможет ли ковбой Джо, зайдя в этот салун, написать на карточке такое число, чтобы автомат выдал ему пиво с молоком?
2. Найдите все такие тройки чисел, для которых среднее арифметическое самих чисел на $\frac{1}{4}$ больше среднего арифметического их квадратов.
3. Решите в натуральных числах уравнение $a! + b! + c! = d!$.
4. Дан треугольник ABC . Точка I – центр его вписанной окружности. Докажите, что окружность, проходящая через A и касающаяся прямой BI в точке I , и окружность, проходящая через B и касающаяся прямой AI в точке I , пересекаются на описанной окружности треугольника ABC .
5. Докажите, что для всех положительных чисел a, b, c выполнено неравенство:

$$\left(\frac{a}{b+c} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{b}{a+c} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{c}{a+b} + \frac{1}{2} \right) \geqslant 1.$$

6. Даны клетчатая таблица $n \times n$. Рассмотрим решетку из всех единичных отрезков, которые являются сторонами клеток таблицы. При каких n все единичные отрезки этой решетки можно разбить на буквы T (то есть на тройки отрезков, имеющих общую вершину)?