

I турнір математичних боїв “Kharkiv Masters”

Особиста усна олімпіада, старша ліга

Довивід

1. Дійсні числа x та y задовольняють умову $x^2 + y^2 + 3xy = 2018$. Знайдіть найбільше можливе значення виразу xy .
2. На одній з шальок терезів лежить вантаж масою 25 г. Аптекарь послідовно кладе на шальки гирьки масою 1 г, 2 г, і т. д. (кожна наступна гирька на 1 г важча за попередню). Кожну гирьку він може покласти на будь-яку з шальок. Яка найменша кількість гирьок йому знадобиться для того, аби врівноважити терези?
3. Задано натуральне число $n > 2$ і просте число p . Виявилось, що $n^3 - 8$ ділиться на p , а $p - 4$ ділиться на n . Доведіть, що число $p - 3$ є точним квадратом.
4. Нехай у трикутнику ABC бісектриса кута BAC перетинає серединний перпендикуляр до сторони AC у точці P , а серединний перпендикуляр до AB – у точці Q . Позначимо точки перетину BC з описаними колами трикутників AQC і APB через N і M відповідно. Доведіть, що $CN = BM$.

Вивід

5. Натуральні числа a, b, c, d попарно різні й такі, що число

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+a}$$

є цілим. Доведіть, що число $a + b + c + d$ не є простим.

6. Точки з цілими координатами на декартовій площині розфарбували в два кольори. Доведіть, що існує нескінченна однокольорова підмножина, симетрична відносно деякої точки площини.