

# I турнір математичних боїв “Kharkiv Masters”

## Особиста усна олімпіада, середня ліга

### Довивід

1. Знайдіть усі пари простих чисел  $p$  і  $q$ , для яких число  $p^4 - q^4$  має менш ніж вісім натуральних дільників.

2. Розв'яжіть рівняння

$$11 \cdot [x] + \left[ x + \frac{1}{2} \right] = 9x,$$

де  $[x]$  – ціла частина числа  $x$ .

3. У трапеції  $ABCD$  проведено бісектриси кутів  $B$  і  $C$ . Вони перетинають основу  $AD$  в точках  $E$  і  $F$  відповідно (точка  $E$  лежить між  $A$  і  $F$ , точка  $F$  між  $E$  і  $D$ ). Промені  $BE$  і  $CF$  перетинаються в точці  $G$ , причому  $EF = FG$ . Доведіть, що  $AD = BC + CD$ .

4. У Вінні-Пуха, П'ятачка та Кролика є 12 повітряних кульок, кожна з яких пофарбована в один з  $n$  кольорів. Відомо, що яким би чином вони не ділили ці кульки між собою порівну, комусь з них дістануться кульки трьох різних кольорів. Знайдіть найменше можливе значення  $n$ .

### Вивід

5. Натуральні числа  $a$  та  $b$  задовольняють умову  $a^3 - b^4 = ab^2$ . Доведіть, що  $b$  є добутком трьох послідовних натуральних чисел.

6. На площині розташовано 2018 точок. Для кожної пари точок відмітили середину відрізка з кінцями в цих точках. Яку найменшу кількість різних точок могли відмітити?