

I турнір математичних боїв “Kharkiv Masters”

Математичний бій №4-В, старша ліга

1. Знайдіть усі многочлени $P(x)$ з дійсними коефіцієнтами, для яких рівність $P(P(x)) = [(P(x))^2]$ справджується для всіх цілих значень x .

2. У чотирикутнику $ABCD$ виконуються рівності $\angle B = \angle C$ та $\angle D = 90^\circ$. Відомо також, що $AB = 2CD$. Доведіть, що бісектриса кута ACB перпендикулярна CD .

3. Знайдіть усі натуральні n такі, що число $\frac{n^{3n-2} - 3n + 1}{3n - 2}$ є цілим.

4. Нехай $n > 1$ – непарне натуральне число. Назвемо послідовність a_1, a_2, \dots, a_n гарною, якщо виконуються наступні умови:

(1) серед a_1, a_2, \dots, a_n кожне число від 1 до n зустрічається рівно один раз;

(2) $|a_1 - 1| + |a_2 - 2| + \dots + |a_n - n| = \frac{n^2 - 1}{2}$.

Скільки існує гарних послідовностей?

5. Числа $1, 2, \dots, n$ написані на картках (по одному на картці). Перший гравець викидає одну картку. Потім другий гравець викидає дві картки з послідовними числами. Після цього перший гравець викидає три картки з послідовними числами. Нарешті, другий гравець викидає чотири картки з послідовними числами. За якого найменшого n другий гравець може забезпечити собі можливість здійснити обидва свої ходи?

6. Гострокутний трикутник ABC з ортоцентром H вписаний у коло ω з центром O . Пряма d проходить через H й перетинає менші дуги AB та AC кола ω в точках P та Q відповідно. Нехай AA' – діаметр кола ω . Прямі $A'P$ та $A'Q$ перетинають BC в точках K та L відповідно. Доведіть, що точки O, K, L та A' лежать на одному колі.

7. Послідовність дійсних чисел a_1, a_2, \dots задана умовами $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{2}$ при $n \geq 1$, причому $a_1 = 2$. Доведіть, що для кожного натурального N виконується нерівність

$$\frac{1}{1 + a_1} + \frac{1}{1 + a_2} + \dots + \frac{1}{1 + a_N} < 1.$$

8. Задано натуральне число n . На площині проведено n прямих, жодні дві з яких не паралельні та жодні три не перетинаються в одній точці. Всі їхні точки перетину пофарбовані червоним кольором. Доведіть, що існує пряма l така, що по обидва боки від неї знаходиться не менше ніж $\left\lceil \frac{(n-1)(n-2)}{10} \right\rceil$ червоних точок (червоні точки, що лежать на прямій l при цьому не враховуються).

9. Задано додатні числа a, b, c, d , для яких виконується рівність

$$\frac{1}{1 + a + ab + abc} + \frac{1}{1 + b + bc + bcd} + \frac{1}{1 + c + cd + cda} + \frac{1}{1 + d + da + dab} = 1.$$

Доведіть, що $abcd = 1$.

10. Позначимо $\sigma(n)$ – суму натуральних дільників числа n . Доведіть, що існує нескінченна кількість натуральних n , для яких $2^{\sigma(n)} - 1$ ділиться на n .