I турнір математичних боїв “Kharkiv Masters”

Математичний бій №4, старша ліга

1. Знайдіть усі многочлени $P(x)$ з дійсними коефіцієнтами, для яких рівність $P(P(x)) = [(P(x))^2]$ справджується для всіх цілих значень x.

2. На дузі AB описаного кола трикутника ABC обрано точку M. Проекції X та Y точки M на прямі AB та BC попали на сторони трикутника, а не на їх продовження. Нехай K та N – середини відрізків XY та AC відповідно. Знайдіть $\angle MKN$.

3. Знайдіть усі натуральні n такі, що число $\dfrac{n^{3n-2} - 3n + 1}{3n-2}$ є цілим.

4. Нехай $n > 1$ – непарне натуральне число. Назвемо послідовність a_1, a_2,..., a_n *гарною*, якщо виконуються наступні умови:
(1) серед a_1, a_2,..., a_n кожне число від 1 до n зустрічається рівно один раз;
(2) $|a_1 - 1| + |a_2 - 2| + \ldots + |a_n - n| = \dfrac{n^2-1}{2}$.
Скільки існує гарних послідовностей?

5. У країні Глушинній є $n \geqslant 10$ міст, між деякими з яких прокладені двосторонні дороги. Назвемо *агломерацією* сукупність з десяти міст, кожні два з яких з’єднані дорогами. Уряд хоче побудувати ще одну дорогу між парою міст, які ще не з’єднані. Відомо, що яку б пару міст вони не обрали, після побудови цієї дороги кількість агломерацій у країні збільшиться. Доведіть, що наразі в країні принаймні $8n - 36$ доріг.

6. Гострокутний трикутник ABC з ортоцентром H вписаний у коло ω з центром O. Пряма d проходить через H й перетинає менші дуги AB та AC кола ω в точках P та Q відповідно. Нехай AA' – діаметр кола ω. Прямі $A'P$ та $A'Q$ перетинають BC в точках K та L відповідно. Доведіть, що точки O, K, L та A' лежать на одному колі.

7. Послідовність дійсних чисел a_1, a_2,...задана умовами $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2+1}{2}$ при $n \geqslant 1$, причому $a_1 = 2$. Доведіть, що для кожного натурального N виконується нерівність

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \ldots + \frac{1}{1+a_N} < 1.$$

8. Задано натуральне число n. На площині проведено n прямих, жодні дві з яких не паралельні та жодні три не перетинаються в одній точці. Всі їхні точки перетину пофарбовані червоним кольором. Доведіть, що існує пряма l така, що по обидва боки від неї знаходиться не менше ніж $\left[\frac{(n-1)(n-2)}{10}\right]$ червоних точок (червоні точки, що лежать на прямій l при цьому не враховуються). Для яких n оцінку не можна покращити?

9. Задано додатні числа a, b, c, d, для яких виконується рівність

$$\frac{1}{1+a+ab+abc} + \frac{1}{1+b+bc+bcd} + \frac{1}{1+c+cd+cda} + \frac{1}{1+d+da+dab} = 1.$$

Доведіть, що $abcd = 1$.

10. Позначимо $\sigma(n)$ – суму натуральних дільників числа n. Доведіть, що існує нескінченна кількість натуральних n, для яких $2^{\sigma(n)} - 1$ ділиться на n.